E.N.S.I DE CHIMIE GROUPE CENTRE (P.C)
DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Session 1974
DURÉE : 4 heures

Un corrigé

I

1. Comme $0 \leq b_0 < a_0$, alors $a_1 - a_0 = \dfrac{b_0 - a_0}{2} < 0$ et $a_1 - b_0 = \dfrac{a_0 - b_0}{2} > 0$. Donc $0 \leq b_0 < a_1 < a_0$. De plus, les nombres considérés étant positifs, $b_0^2 < a_0 b_0 < a_0^2$, d'où $b_0 < \sqrt{a_0 b_0} = b_1 < a_0$. Enfin :

$$a_1 - b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} - \sqrt{a_0 b_0} = \frac{a_0 - 2\sqrt{a_0 b_0} + b_0}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0}\right)^2}{2} > 0.$$

On en déduit donc que $a_1 > b_1$, et donc :

$$0 \leq b_0 < b_1 < a_1 < a_0.$$

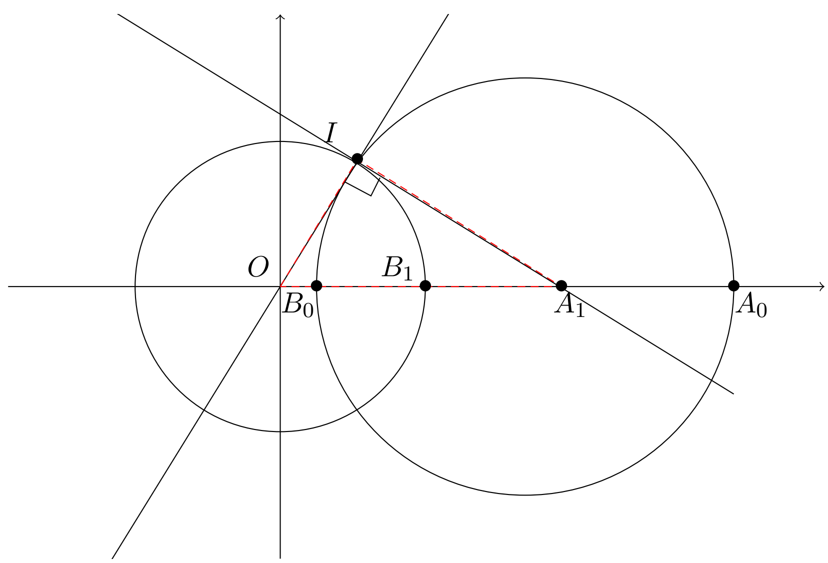
2. On considère le cercle de diamètre $[A_0, B_0]$ et le cercle de centre O et passant par B_1. Ces deux cercles se coupent en deux points I (d'ordonnée > 0) et I'. Alors :

$$OI = OB_1 = b_1 \text{ et } IA_1 = B_0 A_1 = a_1 - b_0.$$

donc :

$$\begin{aligned} OI^2 + IA_1^2 &= b_1^2 + (a_1 - b_0)^2 = b_1^2 + a_1^2 - 2a_1 b_0 + b_0^2 \\ &= a_0 b_0 + a_1^2 - 2\frac{a_0 + b_0}{2} b_0 + b_0^2 = a_1^2 = OA_1^2. \end{aligned}$$

Ainsi d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OIA_1, est rectangle en I.



3. Démontrons par récurrence, sous l'hypothèse $b_0 < a_0$, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; 0 \leq b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n.$$

D'après la première question, la propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons que la propriété soit vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors, le calcul de la question **I.1.** permet d'écrire (il suffit de considérer $b_{n+1} < a_{n+1}$ à la place de $b_0 < a_0$) :

$$b_{n+1} < b_{n+2} < a_{n+2} < a_{n+1},$$

et donc la propriété est héréditaire.
D'après le principe de récurrence, on en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leq b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$$

ce qui permet d'écrire :
• la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite l.
• Par définition on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

et

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $l = \dfrac{l+l'}{2}$ et $l' = \sqrt{ll'}$. On en déduit $l'^2 = ll'$ et puisque $l' > 0$ puisque $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, on obtient $l = l'$.
Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite notée $L(a_0, b_0)$.
Pour $a_0 = 1$ et $b_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient $L\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,84723$ à 10^{-5} près.

II

1. Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $b_0^2 \leq a_0^2 \cos^2 t + b_0^2 \sin^2 t \leq a_0^2$ car $b_0 < a_0$. On en déduit donc :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \ \frac{1}{a_0} \leq \frac{1}{\sqrt{a_0^2 \cos^2 t + b_0^2 \sin^2 t}} \leq \frac{1}{b_0}$$

et donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{a_0} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a_0^2 \cos^2 t + b_0^2 \sin^2 t}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{b_0},$$

soit :

$$\frac{\pi}{2a_0} \leq I(a_0, b_0) \leq \frac{\pi}{2b_0}.$$

2. Posons le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$, $x = \sin t$. Alors $\mathrm{d}x = \cos t \mathrm{d}t = \sqrt{1 - \sin^2 t}\mathrm{d}t$, d'où $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. On obtient donc :

$$(I_0, b_0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - (a_0^2 - b_0^2)x^2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - c_0^2 x^2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Posons $\varphi(y) = \dfrac{(a_1 + c_1)y}{a_1 + c_1 y^2}$. Puisque a_1 et c_1 sont strictement positifs, la fonction φ est dérivable sur $[0, 1]$ et

$$\varphi'(y) = \frac{a_1 + c_1}{(a_1 + c_1 y^2)^2}(a_1 - c_1 y^2).$$

Or, $a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 > c_1^2$, donc $a_1 > c_1$ ce qui implique que $\varphi' > 0$ sur $[0, 1]$. On en déduit le tableau de variation :

y	$0 \qquad\qquad 1$
$\varphi'(y)$	$+$
$\varphi(y)$	$0 \nearrow 1$

On en déduit que φ est strictement croissante sur $[0,1]$, c'est une bijection de $[0,1]$ sur $\varphi([0,1]) = [0,1]$.
On a donc : $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ et pour $x \neq 0$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} x = \frac{(a_1+c_1)y}{a_1+c_1y^2} &\Leftrightarrow (a_1+c_1y^2)x = (a_1+c_1)y \\ &\Leftrightarrow c_1xy^2 - (a_1+c_1)y + a_1x = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\delta = (a_1+c_1)^2 - 4(c_1x)(a_1x) = a_1^2 + 2a_1c_1 - 4a_1c_1x^2$.
Or, $x \leq 1$, donc $-4a_1c_1x^2 \geq -4a_1c_1$, et ainsi :

$$\delta \geq a_1^2 + 2a_1c_1 + c_1^2 - 4a_1c_1 = a_1^2 - 2a_1c_1 + c_1^2 = (a_1-c_1)^2 > 0.$$

L'équation possède donc deux solutions

$$y_1 = \frac{a_1+c_1+\sqrt{\delta}}{2c_1x} \text{ et } y_1 = \frac{a_1+c_1-\sqrt{\delta}}{2c_1x}$$

Or, puisque $\sqrt{\delta} \neq 0$, on a toujours $y_1 > y_2$. La fonction φ étant continue, sa bijection réciproque l'est aussi donc on a : soit $\varphi^{-1}(x) = y_1$, soit $\varphi^{-1}(x) = y_2$. Or :

$$y_1(1) = \frac{a_1+c_1+\sqrt{(a_1-c_1)^2}}{2c_1} = \frac{a_1+c_1+a_1-c_1}{2c_1} = \frac{a_1}{c_1} > 1,$$

ce qui est contradictoire avec le résultat précédent. Donc $\varphi^{-1}(x) = y_2$ et on peut écrire :

$$y_2 = \frac{\left(a_1+c_1-\sqrt{\delta}\right)\left(a_1+c_1+\sqrt{\delta}\right)}{2c_1x\left(a_1+c_1+\sqrt{\delta}\right)} = \frac{4a_1c_1x^2}{2c_1x\left(a_1+c_1+\sqrt{\delta}\right)},$$

d'où (l'expression obtenue étant encore valable en 0), la bijection réciproque de φ est

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & [0,1] & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \dfrac{2a_1x}{a_1+c_1+\sqrt{(a_1+c_1)^2-4a_1c_1x^2}} \end{array}$$

4. • Tout d'abord $c_1^2 = a_1^2 - b_1^2$ donc, puisque $c_1 > 0$, $c_1 = \dfrac{a_0-b_0}{2}$. On en déduit donc que :

$$a_1 + c_1 = \frac{a_0+b_0}{2} + \frac{a_0-b_0}{2} = a_0 \text{ et } a_1c_1 = \frac{a_2^2-b_0^2}{4} = \frac{c_0^2}{4}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} a_0^2 - c_0^2x^2 &= (a_1+c_1)^2 - 4a_1c_1\frac{(a_1+c_1)^2y^2}{(a_1+c_1y^2)^2} \\ &= \frac{(a_1+c_1)^2}{(a_1+c_1y^2)^2}\left((a_1+c_1y^2)^2 - 4a_1c_1y^2\right) \\ &= \frac{(a_1+c_1)^2}{(a_1+c_1y^2)^2}(a_1-c_1y^2)^2, \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\sqrt{a_0^2 - c_0^2 x^2} = \frac{a_1 + c_1}{a_1 + c_1 y^2}(a_1 - c_1 y^2)$$

• Ensuite

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= \frac{(a_1 + c_1 y^2)^2 - (a_1 + c_1)^2 y^2}{(a_1 + c_1 y^2)^2} \\ &= \frac{a_1^2 + 2a_1 c_1 y^2 + c_1^2 y^4 - a_1^2 y^2 - 2a_1 c_1 y^2 - c_1^2 y^2}{(a_1 + c_1 y^2)^2} \\ &= \frac{a_1^2 - (a_1^2 + c_1^2) y^2 + c_1^2 y^4}{(a_1 + c_1 y^2)^2} \\ &= \frac{(1 - y^2)(a_1^2 - c_1^2 y^2)}{(a_1 + c_1 y^2)^2} \end{aligned}$$

donc :

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{a_1^2 - c_1^2 y^2}}{a_1 + c_1 y^2}.$$

• Enfin, on a vu que

$$\mathrm{d}x = \frac{a_1 + c_1}{(a_1 - c_1 y^2)^2}(a_1 - c_1 y^2)\mathrm{d}y,$$

donc :

$$\begin{aligned} I(a_0, b_0) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - c_0^2 x^2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{a_1 + c_1 y^2}{(a_1 + c_1)(a_1 - c_1 y^2)} \frac{a_1 + c_1 y^2}{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{a_1^2 - c_1^2 y^2}} \frac{a + c_1}{(a_1 + c_1 y^2)^2}(a_1 - c_1 y^2)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - c_1^2 y^2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$

et donc :

$$I(a_0, b_0) = I(a_1, b_1).$$

5. D'après ce qui précède, une récurrence immédiate permet de démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ I(a_0, b_0) = I(a_n, b_n).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in [0, 1]$, on a l'encadrement :

$$b_n^2 \leq a_n^2 - c_n^2 x^2 \leq a_n^2,$$

d'où :

$$\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\sqrt{a_n^2 - c_n^2 x^2}} \leq \frac{1}{b_n}.$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$\frac{1}{a_n}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{a_n^2 - c_n^2 x^2}} \leq \frac{1}{b_n}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

soit, puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2a_n} \leq I(a_n, b_n) \leq \frac{\pi}{2b_n}.$$

Enfin, d'après **I.4**, on sait que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $L(a_0, b_0)$, donc :

$$I(a_0, b_0) = \frac{\pi}{2L(a_0, b_0)}.$$

III

1. La fonction $\theta \mapsto \cos(2\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, paire et π-périodique. De plus $\forall \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(2\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

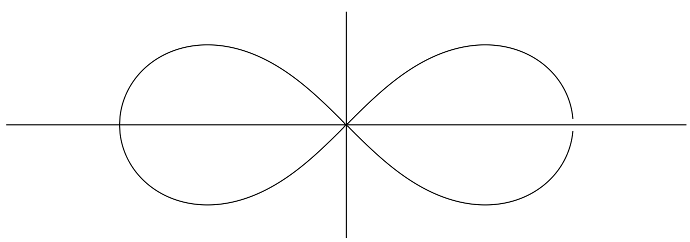
On en déduit que la fonction $\rho : \theta \mapsto \cos(2\theta)$ est définie sur $D_\rho = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$. De plus, en notant Γ cette courbe :

- $\forall \theta \in D_\rho$, $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ donc Γ est symétrique par rapport à l'axe (Ox).
- $\forall \theta \in D_\rho$, $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ donc Γ est symétrique par rapport à l'origine.
- Il s'ensuit que Γ est aussi symétrique par rapport à l'axe (Oy).

La fonction ρ est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $\forall \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$, $\rho'(\theta) = a\dfrac{-\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$, d'où le tableau de variation :

θ	0	$\frac{\pi}{4}$
$\rho'(\theta)$	$-$	$\Vert$
$\rho(\theta)$	a $\searrow$	0

On obtient la courbe suivante :



2. Par symétrie, on en déduit que la longueur de la courbe fermée Γ est :

$$\begin{aligned} L(\Gamma) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}\mathrm{d}\theta \\ &= 4a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)} + \cos(2\theta)}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

D'où

$$L(\Gamma) = 4a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\mathrm{d}\theta.$$

3. Posons le changement de variable $x = \sqrt{2}\sin\theta$. Alors $\theta = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$, donc $\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2 - x^2}}$. De plus, on sait que $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - x^2$, donc on peut donc écrire :

$$L(\Gamma) = 4a\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2 - x^2}}.$$

4. Un cercle de rayon a a pour périmètre $p = 2\pi a$. Or, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $1 \leq 2 - x^2 \leq 2$ donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2 - x^2}} \leq 1$. On en déduit donc que :

$$4a\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} < L(\Gamma) < 4a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ce qui donne :

$$\pi\sqrt{2}a < L(\Gamma) < 2a\pi.$$

La longueur de Γ est inférieure à celle d'un cercle de rayon a.

IV

1. D'après la formule admise, on a $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}$, d'où $\mathrm{d}t = \sqrt{\dfrac{l}{2g}}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$. En intégrant t entre 0 et $\dfrac{T}{2}$, donc θ entre 0 et α, on obtient :

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

2. Posons le changement de variable $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = x\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$, donc $\theta = 2\arcsin\left(x\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$, et par conséquent $\mathrm{d}\theta = \dfrac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}\mathrm{d}x$. En utilisant de plus la formule de trigonométrie :

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{T}{2} &= \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(1 - 2x^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}}\frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1 - x^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}\end{aligned}$$

En particulier, pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}$$

d'où :

$$T = 2\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{2-x^2}} = 2\sqrt{\frac{2l}{g}}\frac{L(\Gamma)}{4a}.$$

3. D'après ce qui précède, on a :

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1 - x^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

Or, si $a_0 = 1$ et $b_0 = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$, alors $c_0^2 = a_0^2 - b_0^2 = 1 - \cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$, donc :

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{a_0^2 - c_0^2x^2}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}I\left(1, \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$$

et donc

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{L\left(1, \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}.$$

Si α tend vers 0, alors b_o tend vers 1 et donc $L(a_0, b_0)$ tend vers $L(1,1) = 1$. Alors :

$$\lim_{\alpha \to 0} T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Pour $l = 100cm$ on obtient $T \approx 1,003s$.
On a donc :

$$a_0 = 1 \text{ et } b_0 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{\alpha^2}{8} + o(\alpha^3),$$

d'où :

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{16} + o(\alpha^3) \text{ et } b_1 = \sqrt{a_0 b_0} = 1 - \frac{\alpha^2}{16} + o(\alpha^3).$$

et donc :

$$L\left(1, \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \frac{\alpha^2}{16} + o(\alpha^3).$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{L\left(1, \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)} = 1 + \frac{\alpha^2}{16} + o(\alpha^3).$$

et donc :

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\pi + \frac{\pi\alpha^2}{16} + o(\alpha^3)\right).$$

•••••••••